Opérateur pluie/débit - cas des bassins versants drainés par un réseau de dimension fractale D

Serge Thibault

Opérateur pluie/débit

(cas des bassins versants drainés par un réseau de dimension fractale D)

Serge Thibault

Le texte qui suit s'appuie très largement sur un extrait du doctorat d'Etat « Modélisation morpho-fonctionnelle des réseaux d'assainissement urbain à l'aide du concept de dimension fractale » (Serge Thibault, INSA de Lyon Université Claude Bernard - Lyon I (1987-04-02)). Cet extrait, dont peu de phrases a été remanié, correspond aux pages 193-199 de ce doctorat - http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00277119_v1/
Le but de cette modélisation était de construire un opérateur qui représente la transformation pluie débit, plus exactement la transformation débit de pluie net, débit de sortie, tenant compte de la forme du bassin versant représentée par celle de son réseau de drainage, un réseau qui s'apparente à une forme fractale de dimension D. (1987-2011)

1. Introduction

La transformation pluie débit résulte des relations entre trois composants, la pluie P, le sol S et le réseau R. Et notre point de départ pour utiliser la géométrie fractale afin de tenir compte de la forme des bassins versants est le comportement hydrologique représenté par le rôle d'un réseau constitué de N tronçons tous identiques, chacun d'eux recevant le même apport surfacique en débit et translatant vers son aval, d'une même quantité temporelle le signal qu'il reçoit à l'amont.

Si Qe(t) est la somme des N débits entrant dans le réseau, celui ci se comporte alors comme un convoluteur, le débit Qs(t) à son exutoire étant obtenu comme suit

$$Qs(t) = O(t) * Qe(t)$$

$$O(t) = \delta'(t) * N(t)/N$$

N(t) étant le nombre de tronçons situés à une distance temporelle t de l'exutoire, N leur nombre total, δ'(t) dérivée de la distribution de Dirac.

Pour ce modèle de transfert, nous pouvons utiliser un modèle fractal de structure qui définit avec une bonne approximation la longueur du réseau contenu dans une boule de rayon R centrée sur l'exutoire, quel que soit R, compris entre 0 et R_M, R_M distance maximum :

$$L(R) = nl^{1-D}R^D$$

La proximité de cette relation avec N(t) définie précédemment, nous conduit à formuler le modèle hydrologique à partir d'un modèle de transfert qui est également un convoluteur

$$Qs(t) = O(t) * Qe(t)$$

Pour un réseau fractal quelconque, l'opérateur O est cette fois nécessairement plus complexe puisque les tronçons ne sont pas des transformateurs tous identiques, qu'ils ne reçoivent pas le même apport surfacique et surtout que nous devons tenir compte du transfert induit par l'écoulement de surface.

O(t) se définit alors comme suit :

$$O(t) = \delta'(t) * A(t)/AT$$

avec A(t) : distribution de surface contribuant à la formation du débit de sortie Qs(t), AT surface totale active pour la pluie considérée.

Comme la surface AT est structurée par le réseau de drainage, la distribution A(t) devrait résulter d'une combinaison de deux distributions traduisant le rôle du sol et du réseau, puisque le réseau est l'objet modélisé, point de notre départ (Relation (S, R, Q)).

P(t) étant la distribution de pluie, celle-ci doit être transformée en une nouvelle distribution Qe(t) qui traduit l'effet du ruissellement pour la production de ce qui s'écoule effectivement vers le réseau, soit la relation (P, S, R) et un second modèle dit de production (S,P), partie d'un modèle hydrologique qui a la syntaxe suivante :

$$Qs = (R \circ S) * (S, P)$$

avec un terme commun S aux deux distributions convoluées qui représente le rôle double du sol.

2. Construction du modèle de transfert

Nous dirons qu'un lieu est à une distance t de l'exutoire si le flot ruisselant qui le traverse ou qui commence son parcours à partir de lui met un temps t pour arriver à l'exutoire. Ainsi, la surface A(t) est constituée de tous les lieux situés à une distance temporelle au plus égale à t.

Nous supposerons que cet ensemble indénombrable est structuré par un réseau de drainage, c'est-à-dire qu'à tout lieu est associé un chemin d'écoulement de longueur t, qui se décompose en deux chemins, le premier de longueur Z correspondant au cheminement réticulaire, et l'autre de longueur (t - Z) correspondant au cheminement sur l'ensemble complémentaire au réseau (intitulé cheminement de surface).

Soit R(Z) la longueur correspondante en réseau et G(t - Z) la longueur du cheminement de surface. La somme R(Z) + G(t-Z) est la longueur du chemin total.

Soit T la plus grande distance temporelle d'une surface active quelconque. Soit t appartenant à l'intervalle (0, T).

Première hypothèse
Quelle que soit la durée Z appartenant à (0, T), nous pouvons lui associer une longueur en réseau et une longueur de chemin en surface. Nous considérons alors que la liaison surface réseau n'est plus discrète (bouches d'égouts), mais est continue.
Seconde hypothèse
Quel que soit Z, au temps de parcours en surface complémentaire (t-Z) est associée une seule distribution G(t-Z) caractéristique de ce parcours. Pour une surface active quelconque, cette distribution représenterait une largeur moyenne de surface située tout le long du réseau.

Avec ces deux hypothèses, au point du réseau d'abscisse temporelle Z, est associée une surface de drainage infinitésimale,

$dA(t) = G(t-Z).R'(Z)dZ$, R'(Z) étant homogène à une vitesse

Soit un réseau qui possède éventuellement plusieurs points distincts situés à l'abscisse Z et N ce nombre, fonction de R(Z). La surface infinitésimale drainée à l'abscisse z est la suivante :

$$dA(t) = G(t-Z).N(R(Z)).R'(Z)dZ \quad (1)$$

et la surface totale A(t) résulte d'une variation continue de Z de 0 à t, soit :

$$A(t) = \int_0^t G(t-Z).N(R(Z)).R'(Z)\,dZ$$

Nota**.** Les distributions G et R seront généralement constantes au bout de deux durées distinctes, les réseaux et surfaces actives étant des grandeurs finies.

Soit maintenant à définir N et G à partir du modèle de structure fractal.

a. Evolution du nombre de terminaisons N en fonction de R

Soit L(R) la longueur totale du réseau à l'abscisse R et N(R) son nombre de terminaisons.
Supposons que L et N soient deux fonctions différentiables.
Avec dN(R) l'accroissement infinitésimal du nombre de terminaisons à la distance R, à R+ dR, nous avons :

$$L(R + dR) = L(R) + (N(R) + dN(R))dR$$

dR doit être suffisamment petit pour que la longueur des chemins correspondants soit assimilable à cet élément différentiel.
N(R) est une courbe qui provient d'un lissage d'une fonction en réalité discontinue, c'est-à-dire que N(R) n'est pas nécessairement un nombre entier. Comme

$$dN(R) = N'(R)dR$$

$$L(R+dR) = L(R) + N(R).dR + N'(R)dR^2$$

Soit lorsque dR tend vers zéro,

$$N(R) = L'(R)$$

b. Evolution de la surface en fonction de R

Soit A(R) la surface totale liée au réseau de longueur L(R). Soit un élément différentiel dR et a(dR) sa surface. De même que précédemment :

$$A\,(R + dR) = A(R) + (N(R) + dN(R))\,a(dR)$$

Hypothèses

- a (dR) ≈ A (dR)
- A(R) est une fonction continûment différentiable :

$$A(dR) = A(o) + A'(o).dR + A"(o).\frac{dR^2}{2!}$$

A(o) étant nul, nous obtenons la relation suivante :

$$A(R + dR) = A(R) + (N(R).dR + N'(R).dR^2).(A'(o) + \frac{dR.A"(0)}{2!} + \cdots.)$$

Soit lorsque dR tend vers zéro

$$A'\,(R) = N(R).A'\,(o)$$

En utilisant la relation établie précédemment en (a), nous obtenons finalement :

$$A\,(R) = A'(0)\,.L(R)$$

A'(o) correspond à une longueur moyenne située tout au long du réseau. Cette indépendance de la largeur vis-à-vis de R provient de l'assimilation de a(dR) à A(dR).
Le résultat ainsi obtenu est équivalent à la seconde hypothèse utilisée pour la construction d'un modèle de transfert.

3. <u>Modèle de transfert fractal</u>

Soit $L(R) = nl^{1-D}R^D$ la relation découlant du modèle de structure fractal et la relation (N,L) précédemment établie. Si R est paramétré par le temps, ces relations ont la forme suivante :

$$L(R(Z)) = nl^{1-D}R(Z)^D$$

$$N(R(Z)) = L'(R(Z))$$

et la relation (1) :

$$dA(t) \ = \ G(t \ - \ Z).N(R(Z)).R'(Z)dZ$$

peut s'écrire comme suit :

$$dA(t) = G(t - Z).\,dL(R(Z))$$

En paramétrant directement la longueur du réseau par le temps :

$$dA(t) \ = \ G(t \ - \ Z)\,L'(Z)dZ$$

$$A(t) = \ G(t) * L'(t) \ = \ (\delta(t) * G(t)) * (\delta'(t) * L(t)\,)$$

Si AT est la surface totale active, l'opérateur de transfert a la forme d'un convoluteur :

$$O(t) = \ \delta''(t) * (G(t) * L(t))/AT$$

G et L étant pris au sens des distributions.

En utilisant la relation (L, R) qui traduit la fractalité du réseau,

$$O(t) = \frac{nl^{1-D}}{AT}\delta''(t) * (G(t) * R(t)^D)$$

Si les termes n, l, D, R relèvent du réseau de drainage, G et AT relèvent de la surface drainée et ne sont pas connus à ce stade de la modélisation.
Ils résultent de la valeur de la surface active qui produit le débit de ruissellement Qe(t) évacué par le réseau de drainage. Ils sont donc définis par le modèle de production et relient celui-ci au modèle de transfert.